На правах рукописи

ДИНЬ ЧУНГ ХОА

ОПЕРАТОРНЫЕ И СЛЕДОВЫЕ НЕРАВЕНСТВА В АЛГЕБРАХ ОПЕРАТОРОВ

01.01.01 — Вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Казань — 2010

Работа выполнена в научно-исследовательском институте математики и механики им. Г. Н. Чеботарева при Казанском (Приволжском) федеральном университете.

Научный руководитель:	*кандидат физико-математических наук,* *старший научный сотрудник* *Тихонов Олег Евгеньевич*
Официальные оппоненты:	*доктор физико-математических наук,* *профессор* *Шерстнев Анатолий Николаевич*
	кандидат физико-математических наук, *доцент* *Веселова Лидия Владимировна*
Ведущая организация:	*Воронежский государственный университет*

Защита диссертации состоится 16 сентября 2010 года в 14 ч. 30 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.081.10 при Казанском (Приволжском) федеральном университете по адресу: 420008, г. Казань, ул. Профессора Нужина, 1/37, НИИММ, ауд. 324.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке им. Н. И. Лобачевского Казанского (Приволжского) федерального университета.

Автореферат разослан 15 июля 2010 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 212.081.10 при КФУ
канд. физ.-мат. наук, доцент Липачев Е. К.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Диссертация посвящена исследованиям по теории операторно монотонных и операторно выпуклых функций, и связанным с ними неравенствам, а также идейно близкой тематике следовых неравенств и их применению к задачам о характеризации следов на алгебрах операторов.

Различные неравенства, содержащие операторы, следы и веса, являются одним из важнейших аппаратов исследования операторных алгебр и связанных с ними пространств измеримых операторов и билинейных форм. Многочисленные работы посвящены изучению таких неравенств, либо включают подобные исследования как свою существенную часть.

Основы теории операторно монотонных и операторно выпуклых функций были заложены в 1930 годах в работах К. Левнера[1] и Ф. Крауса[2]. Такие функции находят эффективные применения в исследованиях по теории операторных алгебр, в некоторых моделях математической физики, например, в квантовой механике, в квантовой теории связи и информации, а также в экономической теории.

Одной из интересных задач в этой тематике является изучение классов операторно монотонных и операторно выпуклых функций относительно заданной алгебры операторов. В работах[3,4] с помощью теории представлений C^*-алгебр Х. Осака, С. Д. Сильвестров и Ж. Томияма дали описания классов операторно монотонных и операторно выпуклых функций относительно заданной C^*-алгебры.

В 2004 г. в работе[5] исследуя неравенства для матриц в пространстве с индефинитной метрикой, порожденной симметрией J, Т. Андо доказал, что если функция $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ операторно монотонна, то она является операторно монотонной и в смысле естественного порядка на множестве всех J-самосопряженных матриц со спектрами в (α, β). Этот результат применяется в

[1]K. Löwner. Über monotone MatrixFunktionen. *Math. Z.* **38** (1934), 177–216.

[2]F. Kraus. Über konvexe Matrixfunktionen. *Math. Z.* **41** (1936), 18–42.

[3]H. Osaka, S.D. Silvestrov, J. Tomiyama. Monotone operator functions on C^*-algebras. *International J. Math.* **16** (2005), 181–196.

[4]S.D. Silvestrov, H. Osaka, J. Tomiyama. Operator convex functions over C^*-algebras. *Proc. Estonian Acad. Sciences.* **59**, № 1 (2010), 48–52.

[5]T. Ando. Löwner inequality of indefinite type. *Linear Algebra and Appl.* **385** (2004), 73–80.

других работах при получении различных матричных неравенств индефинитного типа.

В фундаментальных работах 30-х — 40-х годов, исследуя проблему аксиоматизации квантовой механики, Ф. Мюррей и Дж. фон Нейман заложили основы одного из альтернативных подходов, в котором ограниченные наблюдаемые квантовой системы описываются как самосопряженные элементы некоторого слабо замкнутого кольца операторов в гильбертовом пространстве (такие кольца получили впоследствии название алгебр фон Неймана).

Рассмотрение алгебры фон Неймана как некоммутативного аналога пространства L^∞ существенно ограниченных измеримых функций является основой развития так называемого некоммутативного интегрирования.

В работах 50-х годов И. Сигала[6] и Ж. Диксмье[7] была создана теория интегрирования относительно унитарно инвариантной меры на проекторах или, что то же самое, относительно точного нормального полуконечного следа на полуконечной алгебре фон Неймана, получившая дальнейшее развитие в работах многих авторов. Одним из первых достижений в распространении теории И. Сигала на веса, которые являются наиболее общим аналогом интеграла на алгебре фон Неймана, является созданная А. Н. Шерстневым теория пространства L_1, ассоциированного с нормальным полуконечным весом (см., например, монографию[8]). В 1979 г. У. Хаагеруп[9] ввел понятие расширенной положительной части алгебры фон Неймана при изучении неограниченных условных ожиданий в некоммутативном контексте.

В диссертации рассматривается вопрос об описании классов операторно выпуклых функций относительно произвольной алгебры фон Неймана. В отличие от работ[3,4] наш подход базируется на некоторых хорошо известных результатах из структурной теории алгебр фон Неймана. Также изучаются неравенства для операторно монотонных функций и элементов расширенной положительной части алгебры фон Неймана и для линейных ограниченных операторов в бесконечномерном пространстве с индефинитной метрикой.

---

[6] I. Segal. A non-commutative extension of abstract integration. *Ann. Math.* **37**, № 2 (1953), 401–457.

[7] J. Dixmier. Formes lineaires sur un anneau d'operateurs. *Bull. Soc. Math. France.* **81**, № 1 (1953), 9–39.

[8] А.Н. Шерстнев. *Методы билинейных форм в некоммутативной теории меры и интеграла.* – М.: Физматлит, 2008.

[9] U. Haagerup. Operator valued weights in von Neumann algebras, I. *J. Funct. Anal.* **32** (1979), 175–206.

Другое направление исследования предлагаемой работы — следовые неравенства на алгебрах фон Неймана и C^*-алгебрах и их применение к задачам о характеризации следов в классе всех нормальных весов на алгебрах фон Неймана или линейных положительных функционалов на C^*-алгебрах.

Хорошо известны аналоги классических неравенств (треугольника, Шварца, Гельдера, Коши–Буняковского, Минковского, Юнга, Гольдена–Томпсона и др.) для канонического следа на полной матричной алгебре и их обобщения для следов на операторных алгебрах. В работе [2] мы в простейшем нетривиальном случае полных матричных алгебр начали исследование нового класса неравенств, которые назвали взвешенными следовыми неравенствами монотонности. Пусть τ — точный нормальный полуконечный след на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$. В данной диссертации для плотно заданных самосопряженных операторов A, B, присоединенных к алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$, вещественных функций f и неотрицательных весовых функций w доказываются неравенства

$$\tau(w(A)^{1/2}f(A)w(A)^{1/2}) \leq \tau(w(A)^{1/2}f(B)w(A)^{1/2}) \quad (A \leq B).$$

Такие неравенства можно рассматривать как промежуточный случай между операторными неравенствами, $f(A) \leq f(B)$, и неравенствами монотонности для следа $\tau(f(A)) \leq \tau(f(B))$.

След является одним из фундаментальных понятий теории матричных и операторных алгебр. Поэтому интересным представляется вопрос о выделении следов среди весов, возможно удовлетворяющих тем или иным дополнительным условиям. Исследования по задачам о характеризации следов неравенствами начались в 70-х гг. XX в. В 1979 г. в работе[10] Л. Т. Гарднер доказал, что если для линейного положительного функционала φ на C^*-алгебре $\mathcal{A}$ выполняется неравенство треугольника $|\varphi(A)| \leq \varphi(|A|)$ для любого оператора A из $\mathcal{A}$, то φ — след. Там же доказан аналогичный результат для нормального "сильно полуконечного" веса на алгебре фон Неймана. В 1988 г. в работе[11] Д. Петц и Я. Земанек привели ряд эквивалентных условий, характеризующих след среди линейных положительных функционалов на матричных алгебрах; некоторые результаты они обобщили на случай операторных алгебр. Вопросами о характеризации

[10]L.T. Gardner. An inequatily characterizes the trace. *Canad. J. Math.* **31** (1979), 1322–1328.

[11]D. Petz, J. Zemánek. Characterizations of the trace. *Linear Algebra and Appl.* **111** (1988), 43–52.

следов занимаются и казанские математики. В работах О. Е. Тихонова и соавторов получены характеризации следов неравенством Юнга[12], неравенством монотонности[13], неравенством субаддитивности[14] и неравенствами для модуля[15]. В работе 2006 года[16] Т. Сано и Т. Ятсу получили характеризацию следов среди положительных линейных функционалов на полных матричных алгебрах с помощью неравенств выпуклости. В работе 2009 года[17] К. Чо и Т. Сано обобщили результат А. М. Бикчентаева и О. Е. Тихонова о характеризации следа неравенством Юнга для степенных функций, рассматривая произвольные пары функций, сопряженных по Юнгу. В работе[18] А. М. Бикчентаев получил характеризацию следов в терминах коммутирования произведений проекторов под знаком веса.

В настоящей диссертационной работе рассматривается вопрос о характеризации следов на полных матричных и операторных алгебрах с помощью взвешенных неравенств монотонности, неравенства выпуклости и неравенства Араки–Либа–Тирринга[19].

Цель работы. Основными целями предлагаемой работы являются:

1. Изучение операторно монотонных и операторно выпуклых функций на алгебрах операторов и связанных с ними неравенств.

2. Исследование взвешенных следовых неравенств монотонности на операторных алгебрах.

3. Получение новых характеризаций следов на алгебрах фон Неймана и C^*-алгебрах с помощью неравенств.

---

[12] A.M. Bikchentaev, O.E. Tikhonov. Characterization of the trace by Young's inequality. *J. Inequal. Pure Appl. Math.* **6**, № 2 (2005), Article 49.

[13] A.M. Bikchentaev, O.E. Tikhonov. Characterization of the trace by monotonicity inequalities. *Linear Algebra Appl.* **422** (2007), 274–278.

[14] O.E. Tikhonov. Subadditivity inequalities in von Neumann algebras and characterization of tracial functional. *Positivity.* **9** (2005), 259–264.

[15] А.И. Столяров, О.Е. Тихонов, А.Н. Шерстнев. Характеризация нормальных следов на алгебрах фон Неймана неравенствами для модуля. *Мат. заметки.* **72** (2002), 228–254.

[16] T. Sano, T. Yatsu. Characterizations of the tracial property via inequalities. *J. Inequal. Pure Appl. Math.* **7**, Issue 1 (2006), Article 36.

[17] K. Cho, T. Sano. Young's inequality and trace. *Linear Algebra Appl.* **431**, № 8 (2009), 1218–1222.

[18] А.М. Бикчентаев. Перестановочность проекторов и характеризация следа на алгебрах фон Неймана. I. *Известия ВУЗов. Математика.* № **12** (2009), 80–83.

[19] H. Kosaki. An inequality of Araki–Lieb–Thirring (von Neumann algebra case). *Proc. Amer. Math. Soc.* **114**, № 2 (1992), 477–481.

Методы исследований. Используются структурная теория алгебр фон Неймана, методы теории следов и весов на алгебрах фон Неймана и C^*-алгебрах, теории некоммутативного интегрирования. Применяются также методы спектральной теории самосопряженных операторов и операторов в пространстве с индефинитной метрикой.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми и приводятся с полными доказательствами.

Теоретическая и практическая значимость работы. Диссертационная работа носит теоретический характер. Ее результаты представляют интерес для теории операторно монотонных и операторно выпуклых функций, следовых неравенств, а также их приложений в теории некоммутативного интегрирования.

Основные результаты диссертации:

1. Получено описание классов операторно выпуклых функций относительно произвольной алгебры фон Неймана в зависимости от структуры этой алгебры.

2. Доказаны неравенство монотонности и аналог неравенства Хансена для операторно монотонных функций и элементов расширенной положительной части алгебры фон Неймана.

3. Доказано неравенство монотонности для ограниченных операторов в бесконечномерном пространстве с индефинитной метрикой.

4. Доказаны взвешенные следовые неравенства монотонности для самосопряженных операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана, и операторов из C^*-алгебры.

5. Показано, что взвешенные степенные неравенства монотонности характеризуют следы в классе всех линейных положительных функционалов на полных матричных и C^*-алгебрах и в классе всех нормальных полуконечных весов на алгебрах фон Неймана.

Апробация работы. Основные результаты диссертации прошли апробацию на семинарах "Алгебры операторов и их приложения" при кафедре математического анализа Казанского (Приволжского) федерального университета (руководитель — проф. А.Н.Шерстнев), на молодежных научных конференциях "Лобачевские чтения" (г. Казань, 2006 г., 2008 г.), на Девятой международной Казанской летней школе-конференции (г. Казань, 2009 г.), на Воронежской зимней математической школе С.Г.Крейна (г. Воронеж, 2009 г.), на Воронежской весенней математической школе "Понтрягинские чтения — XXI" (г. Воронеж, 2010 г.).

Публикации автора. Результаты диссертации опубликованы в работах [1]–[10]. Совместная с руководителем О.Е.Тихоновым статья [1] общим объемом 6 страниц — из списка ВАК. Из совместных работ [1]–[4] О.Е.Тихонову принадлежат результаты первого раздела статьи [1] (которые не входят в диссертацию), теорема 1 из [2], теорема 1 из [3] и теорема 1 из [4], остальные результаты принадлежат диссертанту.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения и трех глав, разбитых на 10 параграфов и списка литературы (75 наименований). Общий объем диссертации — 89 страниц машинописного текста.

Содержания работы. Во **введении** проводится общий обзор исследований, связанных с темой диссертационной работы, указываются цели, преследуемые автором при написании работы, перечисляются основные результаты, полученные автором, приводится краткое изложение содержания работы.

Первая глава посвящена теории операторно монотонных и операторно выпуклых функций.

В параграфе 1.1 собраны основные обозначения и предварительные сведения, используемые в работе.

В параграфе 1.2 рассматривается вопрос об описании классов операторно выпуклых функций относительно заданной алгебры фон Неймана.

Для произвольного множества $\mathcal{X}$ операторов в гильбертовом пространстве или элементов C^*-алгебры через $\mathcal{X}^{sa}, \mathcal{X}^+$ будем обозначать его самосопряженную и положительную части соответственно.

Определение. Пусть $\mathcal{A}$ — унитальная C^*-алгебра. Непрерывная функция $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ (где Ω — некоторое подмножество числовой прямой) называется *$\mathcal{A}$-монотонной* (или *операторно монотонной относительно C^*-алгебры $\mathcal{A}$*), если для любых $A, B \in \mathcal{A}^{sa}$ таких, что их спектры $\sigma(A), \sigma(B) \subset \Omega$ и $A \le B$, имеет место неравенство $f(A) \le f(B)$. Непрерывную функцию $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ (где Ω — выпуклое подмножество числовой прямой) назовем *$\mathcal{A}$-выпуклой* (или *операторно выпуклой относительно C^*-алгебры $\mathcal{A}$*), если для любых $A, B \in \mathcal{A}^{sa}$ таких, что $\sigma(A), \sigma(B) \subset \Omega$, и любого $\lambda \in [0, 1]$ имеет место неравенство

$f(\lambda A+(1-\lambda)B)\leq \lambda f(A)+(1-\lambda)f(B)$.

Класс всех $\mathcal{A}$-монотонных функций обозначим через $\mathfrak{P}_{\mathcal{A}}$, всех $\mathcal{A}$-выпуклых функций — $\mathfrak{Q}_{\mathcal{A}}$. Отождествляя, как обычно, алгебру $B(\mathcal{H}_n)$ всех операторов в n-мерном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_n$ и алгебру матриц M_n, получаем в качестве $\mathfrak{P}_{B(\mathcal{H}_n)}$ и $\mathfrak{Q}_{B(\mathcal{H}_n)}$ хорошо изученные классы матрично монотонных и матрично выпуклых функций порядка n, которые в дальнейшем будем обозначать просто $\mathfrak{P}_n$ и $\mathfrak{Q}_n$. Если f принадлежит $\mathfrak{P}_n$ (соответственно $\mathfrak{Q}_n$) для любого $n\in\mathbb{N}$, то f называется *операторно монотонной* (соответственно *операторно выпуклой*) *функцией*. Множества всех операторно монотонных и операторно выпуклых функций обозначим через $\mathfrak{P}_\infty$ и $\mathfrak{Q}_\infty$ (их называют *классами операторно монотонных и операторно выпуклых функций* соответственно).

Основным результатом этого параграфа является

Теорема 1.2.1. *Пусть $\mathcal{M}$ — алгебра фон Неймана.*

(i) *В каждом из следующих случаев класс $\mathfrak{Q}_{\mathcal{M}}$ совпадает с классом $\mathfrak{Q}_\infty$:*

  (a) *$\mathcal{M}$ имеет прямое слагаемое типа* II;

  (b) *$\mathcal{M}$ имеет прямое слагаемое типа* III;

  (c) *$\mathcal{M}$ имеет прямое слагаемое типа I_α, где α — бесконечное кардинальное число*;

  (d) *$\mathcal{M}$ имеет бесконечное число слагаемых типа I_{n_i}, где n_i — различные натуральные числа.*

(ii) *Если $\mathcal{M}$ есть конечная прямая сумма алгебр типа I_{n_i} $(n_i\in\mathbb{N})$, то класс $\mathfrak{Q}_{\mathcal{M}}$ совпадает с классом $\mathfrak{Q}_k$, где $k=\max n_i$.*

Таким образом, $\mathfrak{Q}_{\mathcal{M}}=\mathfrak{Q}_n$ для некоторого $n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$.

Следствие 1.2.2. *Для произвольной унитальной C^*-алгебры $\mathcal{A}$ найдется $n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$ такое, что $\mathfrak{Q}_{\mathcal{A}}=\mathfrak{Q}_n$.*

Отметим, что следствие 1.2.2 представляет из себя основной результат работы[4].

В 1980 г. в работе[20] Ф. Хансен доказал, что если функция $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ операторно монотонна и $f(0)\geq 0$, то $A^*f(X)A\leq f(A^*XA)$ для любого положительного ограниченного оператора X и любого сжатия A в гильбертовом

[20] F. Hansen. An operator inequality. *Math. Ann.* **246** (1980), 249–250.

пространстве $\mathcal{H}$. В параграфе 1.3 этот результат обобщается на элементы расширенной положительной части алгебры фон Неймана. В нем доказаны следующие теоремы.

Теорема 1.3.1. *Пусть* $\mathcal{M}$ *— алгебра фон Неймана в гильбертовом пространстве* $\mathcal{H}$ *и* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *—* $\mathcal{M}$*-монотонная функция. Тогда* $f(M) \leq f(N)$ *для любой пары элементов* M, N *из расширенной положительной части* $\widehat{\mathcal{M}}_+$ *таких, что* $M \leq N$.

Теорема 1.3.2. *Пусть* $\mathcal{M}$ *— алгебра фон Неймана в гильбертовом пространстве* $\mathcal{H}$ *и* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *— операторно монотонная функция. Тогда* $C^* f(M) C \leq f(C^* M C)$ *для любого элемента* $M \in \widehat{\mathcal{M}}_+$ *и любого сжатия* $C \in \mathcal{M}$.

Параграф 1.4 посвящен неравенствам для линейных ограниченных операторов в бесконечномерном пространстве с индефинитной метрикой. Пусть $J\,(\neq \pm I)$ — самосопряженная инволюция в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Запись $A \leq^J B$ означает, что $JA \leq JB$. Матричный случай следующей теоремы доказан Т. Андо[5].

Теорема 1.4.1. *Пусть* $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *— операторно монотонная функция. Тогда*

$$f(A) \leq^J f(B)$$

для любых $A \leq^J B$ *таких, что* $\sigma(A), \sigma(B) \subset (0, \infty)$.

С использованием теоремы 1.4.1 доказывается следующее утверждение.

Теорема 1.4.2. *Пусть* A, C *—* J*-самосопряженные операторы со спектрами в* $(0, +\infty)$ *и* $A, C \leq^J I$*. Тогда*

(i) $(CAC)^\lambda \leq^J CA^\lambda C$ *для любого* $\lambda \in [1, 2]$;

(ii) $(CAC)^\lambda \geq^J CA^\lambda C$ *для любого* $\lambda \in [0, 1]$.

Неравенства в предыдущей теореме являются индефинитными аналогами операторных неравенств Хансена[20] и Иенсена[21] для степенной функций.

Во **второй главе** диссертации рассматриваются взвешенные следовые неравенства монотонности в алгебрах операторов.

---

[21] F. Hansen, G.K. Pedersen. Jensen's inequality for operator and Löwner's theorem. *Math. Ann.* **258** (1982), 229–241.

В параграфе 2.1 исследуются взвешенные следовые неравенства на $*$-алгебре $S(\mathcal{M})$ всех измеримых операторов относительно алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$[6]. Пусть φ — точный нормальный полуконечный вес на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$. Для каждого плотно заданного (не обязательно ограниченного) положительного самосопряженного оператора A, присоединенного к алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$ значение $\widetilde{\varphi}(A)$ определяется следующим образом[8]:

$$\widetilde{\varphi}(A) \equiv \lim_{\alpha \to +0} \varphi(A_\alpha)\, (= \sup_{\alpha > 0} \varphi(A_\alpha)),$$

где $A_\alpha = A(I + \alpha A)^{-1}, \quad \alpha > 0.$

Основным результатом этого параграфа является следующая

Теорема 2.1.2. *Пусть τ — точный нормальный полуконечный след на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$, f — непрерывная, неотрицательная, выпуклая, монотонно неубывающая функция на выпуклом подмножестве Ω числовой прямой, w — неотрицательная борелевская функция на Ω, ограниченная на компактных подмножествах Ω. Тогда*

$$\widetilde{\tau}(w(A)^{1/2} f(A) w(A)^{1/2}) \leq \widetilde{\tau}(w(A)^{1/2} f(B) w(A)^{1/2})$$

для любых операторов A, $B \in S(\mathcal{M})^{sa}$ таких, что $\sigma(A)$, $\sigma(B) \subset \Omega$ и $A \leq B$.

Пусть τ — точный нормальный полуконечный след на полуконечной алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$. По теореме Радона–Никодима для весов[22] каждому самосопряженному оператору $K \geq 0$, присоединенному к $\mathcal{M}$, отвечает нормальный полуконечный вес $\widetilde{\varphi}_K$ на $\mathcal{M}$, действующий по формуле $\widetilde{\varphi}_K = \widetilde{\tau}(K\cdot)$, причем выражение в правой части понимается в регуляризованном смысле:

$$\widetilde{\tau}(KX) \equiv \lim_{\alpha \to +0} \tau(X^{1/2} K_\alpha X^{1/2}) = \lim_{\alpha \to +0} \tau(K_\alpha^{1/2} X K_\alpha^{1/2}), \quad X \in \mathcal{M}^+,$$

где $K_\alpha = K(I + \alpha K)^{-1}\, (\alpha > 0)$.

Известно, что операции сложения и произведения операторов выводят из класса всех самосопряженных положительных операторов, присоединенных к заданной алгебре фон Неймана. Однако, упомянутая выше теорема Радона–Никодима для весов позволяет нам корректно записать аналогичные взвешенные следовые неравенства. В параграфе 2.2 рассматриваются взвешенные сле-

[22] G.K. Pedersen, M. Takesaki. The Radon–Nikodym theorem for von Neumann algebras. *Acta Math.* **130**, № 1-2 (1973), 53–87.

довые неравенства монотонности для самосопряженных положительных операторов, присоединенных к заданной алгебре фон Неймана. Основной теоремой этого параграфа является следующая

Теорема 2.2.1 *Пусть τ — точный нормальный полуконечный след на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$, f — непрерывная, неотрицательная, выпуклая, монотонно неубывающая функция на выпуклом подмножестве Ω числовой прямой, w — неотрицательная борелевская функция на Ω. Тогда*

$$\widetilde{\tau}(w(A)^{1/2}f(A)w(A)^{1/2}) \leq \widetilde{\tau}(w(A)^{1/2}f(B)w(A)^{1/2})$$

для любой пары плотно заданных положительных самосопряженных присоединенных к алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$ операторов A, B таких, что $\sigma(A)$, $\sigma(B) \subset \Omega$ и $A \leq B$.

В параграфе 2.3 рассматриваются взвешенные неравенства монотонности для следов на C^*-алгебрах. Доказана следующая

Теорема 2.3.1. *Пусть τ — полуконечный полунепрерывный снизу след на C^*-алгебре $\mathcal{A}$, f — непрерывная, неотрицательная, выпуклая, монотонно неубывающая функция на выпуклом подмножестве Ω числовой прямой, w — неотрицательная непрерывная функция на Ω. Тогда*

$$\tau(w(A)^{1/2}f(A)w(A)^{1/2}) \leq \tau(w(A)^{1/2}f(B)w(A)^{1/2})$$

для любой пары элементов A, $B \in \mathcal{A}^{sa}$ таких, что $\sigma(A)$, $\sigma(B) \subset \Omega$ и $A \leq B$.

В случае конечного следа условие неотрицательности функции f можно отбросить.

Третья глава диссертации посвящена задаче о характеризации следов среди линейных положительных функционалов или нормальных весов на операторных алгебрах с помощью взвешенных неравенств, полученных в предыдущей главе, и ряда других неравенств.

В параграфе 3.1 получены новые характеризации следов на полных матричных алгебрах. Основные результаты этого параграфа (теоремы 3.1.1, 3.1.2, 3.1.3, 3.1.4, 3.1.5, 3.1.6) собраны в следующей теореме.

Теорема 3.1. *Пусть φ — положительный линейный функционал на полной матричной алгебре M_n. Пусть a, b — два различных неотрицательных* *числа, $r \geq 0$, $p > 1$ и s — произвольное натуральное число большее 1. Тогда выполнение каждого из следующих условий влечет, что φ — скалярное кратное канонического следа на M_n:*

(i) *для любых $A \leq B$ из M_n^+*

$$\varphi(A^{p+2r}) \leq \varphi(A^r B^p A^r);$$

(ii) *для любых $A \leq B$ из M_n^+*

$$\varphi(B^r A^p B^r) \leq \varphi(B^{p+2r});$$

(iii) *для любых A, $C \in M_n^+$*

$$\varphi((A^{1/2} C^{1/s} A^{1/2})^s) \leq \varphi(A^{s/2} C A^{s/2});$$

(iv) *для любых $A \leq B$ из M_n^+*

$$|\varphi(BA^p)| \leq \varphi(B^{p+1});$$

(v) *для любых A, $C \in M_n^+$*

$$\varphi(A^a C A^b + A^b C A^a) \geq 0;$$

(vi) *для любых $A \leq B$ из M_n^+*

$$\varphi(Af(A)) \leq |\varphi(Af(B))|,$$

где функция $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ такая, что она непрерывна в 0 и ее производная $f'(x)$ непрерывна и строго положительна на $(0, +\infty)$.

Заметим, что пункты (i), (ii) являются обобщениями некоторых результатов из работ[13,16], которые утверждают, что если при $p > 1$ для положительного линейного функционала φ на алгебре M_n выполнено неравенство $\varphi(A^p) \leq \varphi(B^p)$ для любых $A \leq B$ из M_n^+, то φ — скалярное кратное следа на M_n.

В параграфе 3.2, пользуясь техникой, разработанной в работах[10,14], характеризации следов неравенствами обобщаются со случая полных матричных алгебр на случай алгебр фон Неймана. В частности, перенесены некоторые результаты предыдущего параграфа. Основные результаты параграфа 3.2 (теоремы 3.2.1, 3.2.2, 3.2.3) отражены в следующей теореме.

Теорема 3.2. *Пусть φ — нормальный полуконечный вес на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$, $r \geq 0$, $p > 1$, $m > 2$, и s — произвольное натуральное число большее* 1. *Тогда выполнение каждого из следующих условий влечет, что φ — след*:

(i) *для любых $A, B \in \mathcal{M}^+$ и любого $\lambda \in [0, 1]$*

$$\varphi((\lambda A + (1-\lambda)B)^m) \leq \lambda\varphi(A^m) + (1-\lambda)\varphi(B^m); \tag{1}$$

(ii) *для любых A, $B \in \mathcal{M}^+$ таких, что $A \leq B$*

$$\varphi(A^{2r+p}) \leq \varphi(A^r B^p A^r);$$

(iii) *для любых A, $C \in \mathcal{M}^+$*

$$\varphi((A^{1/2}C^{1/s}A^{1/2})^s) \leq \varphi(A^{s/2}CA^{s/2}).$$

Так как для следового функционала τ на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$ и любых операторов $A \in \mathcal{M}^+$, $C \in \mathcal{M}$ выполняется равенство $\frac{1}{2}\tau(AC + CA) = \tau(A^{1/2}CA^{1/2})$, то следующее утверждение можно интерпретировать как описание условий, при которых выполнено взвешенное неравенство монотонности с весовой функцией $w(x) = x$.

Предложение 3.2.1. *Пусть нормальный положительный функционал φ на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$ и борелевская функция $f \colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, ограниченная на ограниченных подмножествах $\mathbb{R}^+$, таковы, что*

$$\varphi(Af(A)) \leq \frac{1}{2}\varphi(Af(B) + f(B)A)$$

для любых A, $B \in \mathcal{M}^+$, удовлетворяющих $A \leq B$. Тогда либо f постоянна на $(0, +\infty)$, *либо функционал φ следовый.*

В этом параграфе также получено полное описание класса нормальных (необязательно полуконечных) весов на алгебре фон Неймана, удовлетворяющих неравенству выпуклости (1) (теорема 3.2.4).

В параграфе 3.3 на примере взвешенных степенных неравенств монотонности показано, как характеризации следов неравенствами переносятся на случай C^*-алгебр.

Теорема 3.3.1. *Пусть φ — положительный функционал на C^*-алгебре $\mathcal{A}$, $r \geq 0$ и $p > 1$ — некоторые фиксированные числа. Тогда если для любых $A, B \in \mathcal{A}^+$ таких, что $A \leq B$ выполнено неравенство*

$$\varphi(A^{2r+p}) \leq \varphi(A^r B^p A^r),$$

то функционал φ следовый.

Следствие 3.3.1. *Пусть $\mathcal{A}$ — C^*-алгебра, $r \geq 0$ и $p > 1$ — некоторые фиксированные числа. Тогда если для любых $A, B \in \mathcal{A}^+$ таких, что $A \leq B$ выполнено неравенство $A^{2r+p} \leq A^r B^p A^r$, то $\mathcal{A}$ коммутативна.*

Отметим, что при $r = 0$ и $p = 2$ это следствие дает хорошо известный критерий Огасавары коммутативности C^*-алгебры[23].

Автор выражает глубокую признательность и искреннюю благодарность своему научному руководителю, старшему научному сотруднику, кандидату физико-математических наук, Олегу Евгеньевичу Тихонову за предложенную тематику исследований и всестороннюю поддержку в написании данной работы.

Публикации автора по теме диссертации

[1] Динь Чунг Хоа. *К теории операторно монотонных и операторно выпуклых функций* / Динь Чунг Хоа, Тихонов О.Е. // Известия ВУЗов. Математика. – 2010. – № 3. – С. 9–14.

[2] Dinh Trung Hoa. *Weighted trace inequalities of monotonicity* / Dinh Trung Hoa, Tikhonov O.E. // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2007. – V. 25. – P. 63–67.

[3] Динь Чунг Хоа. *Взвешенные неравенства монотонности для следов на операторных алгебрах* / Динь Чунг Хоа, Тихонов О.Е. // Препринт НИИММ им. Н.Г. Чеботарева Казанск. гос. ун-та. – 0001-2009. – 8 с. (http://www.niimm.ksu.ru/data/preprints/thepreprints/0001-0009.pdf)

[4] Динь Чунг Хоа. *Взвешенные неравенства монотонности для следов на операторных алгебрах* / Динь Чунг Хоа, Тихонов О.Е. // Труды Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. Теория функций, ее приложения и смежные вопросы. Тез. докл. – Казань: Изд-во Казанского ун-та. – 2009. – Т. 38. – С. 111–112.

[23] T. Ogasawara. A theorem on operator algebras. *J. Hiroshima Univ.* **18** (1955), 307–309.

[5] Динь Чунг Хоа. *Характеризация следов на алгебрах фон Неймана неравенствами выпуклости*/ Динь Чунг Хоа // Труды Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. Лобачевские чтения – 2006. Тез. докл. – Казань: Изд-во Казанского ун-та. – 2006. – Т. 34. – С. 76–79.

[6] Динь Чунг Хоа. *Характеризация следов взвешенными неравенствами*/ Динь Чунг Хоа // Труды Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. Лобачевские чтения – 2008. Тез. докл. – Казань: Изд-во Казанского ун-та. – 2008. – Т. 37. – С. 43–45.

[7] Динь Чунг Хоа. *Операторные неравенства в пространстве с индефинитной метрикой* / Динь Чунг Хоа // Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна – 2009. Тез. докл. – Воронеж: Изд-во Воронежского ун-та. – 2009. – С. 60–61.

[8] Динь Чунг Хоа. *Взвешенные неравенства для следов на* $*$*-алгебрах измеримых операторов относительно алгебры фон Неймана* / Динь Чунг Хоа // Казанский университет. Казань, 2010. – 10 с. – Деп. в ВИНИТИ. – 12.03.10. – № 149-В2010.

[9] Динь Чунг Хоа. *Неравенства для элементов расширенной положительной части алгебры фон Неймана* / Динь Чунг Хоа // Понтрягинские чтения – 2010. Тез. докл. – Воронеж: Изд-во Воронежского ун-та. – 2010. – С. 80–81.

[10] Динь Чунг Хоа. *Неравенства монотонности и Хансена для элементов расширенной положительной части алгебры фон Неймана* / Динь Чунг Хоа // Казанский университет. Казань, 2010. – 9 с. – Деп. в ВИНИТИ. – 18.01.2010. – № 8-В2010.